

$a < \frac{5}{4}$. 故答案为

$(1, \frac{5}{4})$.

点评: 本小题主要考查函数的图像与性质、不等式的解法, 着重考查了数形结合的数学思想.

例 5. (2017 年衡水一调 (理)) 若实数 a, b, c, d 满足 $(b+a^2-3\ln a)^2+(c-d+2)^2=0$, 则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 8

解析: 因为数 a, b, c, d 满足 $(b+a^2-3\ln a)^2+(c-d+2)^2=0$, 所以 $b+a^2-3\ln a=0$, $c-d+2=0$, 设 $b=y$, $a=x$, 则有 $y=3\ln x-x^2$, 设 $d=y$, $c=x$, 则有 $y=x+2$, 所以 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 就是曲线 $y=3\ln x-x^2$ 与直线 $y=x+2$ 之间的最小距离的平方, 如图 5, 作 $y=3\ln x-x^2$ 的切线 $m: y=x+t$, 设切点为

(x_0, y_0) , 则有 $1=\frac{3}{x_0}-2x_0$, 解

得 $x_0=1$, $x_0=-\frac{3}{2}$ (舍去), 把

$x_0=1$ 代入 $y=3\ln x-x^2$ 得 $y_0=-1$,

所以切点为 $(1, -1)$, 则切点

为 $(1, -1)$ 到直线 $x-y+2=0$ 的

距离 $d=\frac{|1+1+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,

所以 $d^2=8$, $(a-c)^2+(b-d)^2$

的最小值为 8. 故选 D.

点评: 利用导数研究曲线在某点的切线方程及其应用,

通过作出函数图像, 把“数”的问题转化“形”的问题.

三、利用数形结合的思想解决方程与不等式的问题

不等式所涉及到的复杂变换技巧和过于形式化的知识特点, 使不等式的学习使得抽象和难于理解. 如果方程或不等式两边的表达式有明显的几何意义, 或通过某种方式可以与图形建立联系, 可将方程或不等式所表达的抽象数量关系转化为图形的位置或度量关系加以解决, 使得原问题直观且易于理解, 从而所讨论问题得到解决.

例 6. 若存在正数 x 使 $2^x(x-a) < 1$ 成立, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$
C. $(0, +\infty)$ D. $(-1, +\infty)$

解析: 因为 $2 > 0$, 所以由 $2^x(x-a) < 1$ 得 $x-a < \frac{1}{2^x}=2^{-x}$, 在坐标系中, 作

出函数 $f(x)=x-a$, $g(x)=2^{-x}$ 的图像, 如图 6, 当 $x > 0$ 时, $g(x)=2^{-x} < 1$, 所

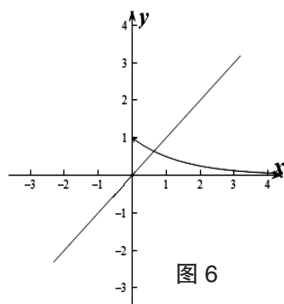


图 6

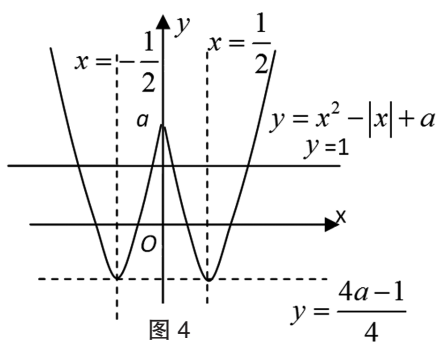


图 4

以如果存在 $x > 0$, 使 $2^x(x-a) < 1$, 则有 $-a < 1$, 即 $a > -1$, 故选 D.

点评: 本题运用数形结合思想, 通过画出函数的图像, 观察得出.

例 7. 已知函数 $f(x)=|x-2|+1$, $g(x)=kx$. 若方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, +\infty)$

解析: 由已知, 函

数 $f(x)=|x-2|+1$, $g(x)=kx$ 的图像有两个公共点, 画图 (如图 7) 可知

当直线介于 $l_1: y=\frac{1}{2}x$,

$l_2: y=x$ 之间时, 符合题意. 故选 B.

点评: 本题运用数形结合思想, 通过画出函数的图像, 观察得出.

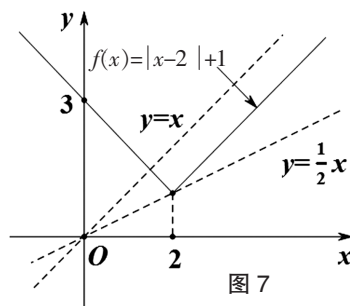


图 7

四、利用数形结合的思想解决三角函数问题

有关三角函数单调区间的确定或比较三角函数值的大小等问题, 一般借助于特殊三角形或三角函数图像来处理, 数形结合思想是处理三角函数问题的重要方法.

例 8. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{5}{13}$, $a=1$, 则 $b=$ _____.

解析: 过点 B 作 $BD \perp AC$ 交 AC 于点 D , 如图 8, 因为

$\cos A = \frac{4}{5}$, $\cos C = \frac{5}{13}$, 可设

$BD=12t$, 则 $AB=20t$, $AD=$

$16t$, $BC=13t$, $CD=5t$, 又

$BC=a=1$, 所以 $t=\frac{1}{13}$, 所以

$b=AC=21t=\frac{21}{13}$.

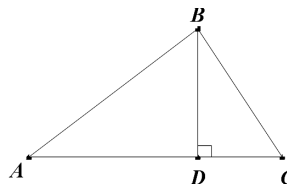


图 8

点评: 本题巧妙的构造图形, 然后运用解直角三角形和勾股定理知识解决问题.

例 9. (2017 年上海五校联考) 已知函数 $f(x)=A \sin(2x+\varphi)$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $A > 0$) 部分

图像如图 9 所示, 且 $f(a)=f(b)=0$, 对不同的 $x_1, x_2 \in [a, b]$,

若 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 有 $f(x_1+x_2)=\sqrt{3}$, 则 $\varphi=$ _____.

解析: 由图像对称性

可知 $A=2$, $T=\pi$, 由于 $f(a) \neq f(b)=0$, 所以 $b-a=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\sin(a+b+$

$\phi)=1$, 所以 $a+b+\phi=\frac{\pi}{2}$, 又 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 且 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 所以 x_1+

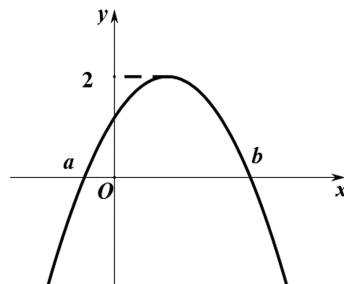


图 9